Lista 7: Cálculo I

A. Ramos *

May 28, 2018

Abstract

Lista em constante atualização.

1. Integrais;
2. Técnicas de integração.

1 Exercícios

Faça do livro texto, os exercícios correspondentes aos temas desenvolvidos em aula.

2 Exercícios adicionais

2.1 Integral indefinida

1. Calcule as seguintes integrais indefinidas:
   (a) $\int \frac{x+1}{x^2+2x} dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x| + C$
   (b) $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + C$
   (c) $\int \frac{3+x^2}{x^2(x^2+9)} dx = \frac{2}{9}\arctan\frac{x}{3} - \frac{1}{3x} + C$
   (d) $\int \frac{\cos x dx}{5-6\sin x+\sin^2 x} = \frac{1}{4}\ln|\frac{\sin x-5}{\sin x-1}| + C$
   (e) $\int \frac{\cos x \sin x dx}{\sqrt{2-\sin^4 x}} = \frac{1}{2}\arcsin(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}) + C$
   (f) $\int \cosh^2 x dx = \frac{1}{4}\sinh 2x + \frac{x}{2} + C$
   (g) $\int \frac{dx}{x^2-7x+10} = \frac{1}{3}\ln\frac{x-5}{x-2} + C$
   (h) $\int \ln(\cos x)\tan x dx = -\frac{1}{2}\ln^2\cos x + C$
   (i) $\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{ax^n+b}} = \frac{2}{na}\sqrt{b+ax^n} + C$
   (j) $\int e^{2x-5} dx = \frac{1}{2}e^{2x-5} + C$
   (k) $\int (\ln x+1)e^{x\ln x} = x^x + C$
   (l) $\int \frac{x^3+x+5}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} + 5\arctan x + C$
   (m) $\int \frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}} = \arcsin(\frac{x-1}{4}) + C$
   (n) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+ax+b}} = \ln|x+\frac{a}{2}+\sqrt{x^2+ax+b}| + C$
   (o) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{3}\left((x+1)^{3/2}-(x-1)^{3/2}\right) + C$
   (p) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = 2\arctan(\sqrt{e^x-1}) + C$
   (q) $\int \sin x \sin(\cos x) dx = \cos(\cos x) + C$
   (r) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx = \arcsin x + \ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C$
   (s) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx = \ln|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}| + C$
   (t) $\int x^3\sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{a^2}{3}(a^2-x^2)^{3/2} - \frac{1}{5}(a^2-x^2)^{5/2} + C$
2. Calcule as integrais usando integração por partes:
   (a) $\int x^2\ln x dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: `albertoramos@ufpr.br`.

(b) $\int xe^{2x}dx = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)+C$

(c) $\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\sin bx - b\cos bx\}+C$

(d) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx = \frac{x}{2}\tan(\frac{x}{2})+C$

(e) $\int \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}dx = \frac{\ln(1-x^2)}{2}+\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{1/2}}+C$

(f) $\int \ln^2(x)dx = x(\ln^2(x)-2\ln x+2)+C$

(g) $\int x^3\sin x dx = -x^3\sin x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+C$

(h) Seja f e g duas funçõoes duas vezes derivável. Suponha que $f''(x)=-af(x)$ e $g''(x)=bg(x)$, onde a e b são constantes. Então, mostre que $\int f(x)g''(x)dx = \frac{f(x)g'(x)-f'(x)g(x)}{a+b}+C$.

2.2 Teorema Fundamental do Cálculo

1. Enuncie e mostre o Teorema Fundamental do Cálculo.

2. Suponha que f é contínua em [a,b]. Mostre que $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$. Use a mesma técnica para provar que:

   (a) $\int_1^3 \sqrt{x^4+1}dx \geq \frac{26}{3}$

   (b) $\int_0^{\pi/2} x\sin x dx \leq \frac{\pi^2}{8}$

   (c) $|\int_0^{\pi/2} f(x)\sin x dx| \leq \int_0^{\pi/2}|f(x)|dx$

3. Encontre uma função f e um número a tais que

$$4+\int_a^x \frac{f(s)}{s^2}ds = 2\sqrt{x} \text{ para todo } x>0.$$

4. Calcule as derivadas de $F(x)$.

   (a) $F(x)=\int_0^x e^s\ln s ds, \quad F'(x)=e^x\ln x.$

   (b) $F(x)=\int_2^{x^4}\sinh s ds, \quad F'(x)=4x^3\sinh(x^4).$

   (c) $F(x)=\int_{-x}^{x}\frac{dt}{1+t^2}, \quad F'(x)=\frac{2}{1+x^2}.$

   (d) $F(x)=\sin\left(\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin^3(t)dt\right)dy\right), \quad F'(x)=\cos\left(\int_0^x\sin\left(\int_0^y\sin^3(t)dt\right)dy\right).\sin\left(\int_0^x\sin^3(s)ds\right).$

5. Se $\int_0^{x^2} f(s)ds = x^2(1+x)$. Mostre que $f(2)=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$.

6. Se $\int_{\sqrt{3}}^{x^2+1} f(s)ds = \sqrt{x}+\sqrt{3}$. Mostre que $f(17)=1/32$.

7. Prove que

$$\int_a^b \frac{2x}{1+x^2}dx = \int_{1+a^2}^{1+b^2}\frac{ds}{d}.$$

8. Se

$$F(x)=\int_0^{1/x}\frac{ds}{s^2+1}+\int_0^x\frac{dt}{t^2+1}.$$

   Mostre que $F(x)$ é constante em $(0,\infty)$. Encontre esse valor.

9. Se $F(x)=\int_1^x\sqrt{t^3-1}dt$. Calcule

$$\lim_{x\to 2}\frac{F(x^3)-F(8)}{\sin(x-2)}.$$

   Rpta $12\sqrt{511}$.

10. Calcule $\int_{-2}^{4}|\frac{x+1}{x+6}|dx = 4-5\ln(\frac{5}{8})$.

2.3 Integrais e áreas

1. Encontre a área da região limitada por o gráfico da curva $y = x^3 + x + 3$, o eixo x e as retas verticais $x = -1$ e $x = 2$.
   Rpta: $57/4u^2$

2. Encontre a área da região limitada por o gráfico da curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas verticais $x = 1$ e $x = 7$, onde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{, se } x \in (-\infty, 3) \\ 6x - x^2 & \text{, se } x \in [3, 10] \end{cases}$$

   Rpta: $30u^2$

3. Encontre a área da região limitada pelas linhas cujas equações são $y^2 = x + 1$ e $y = x - 1$. *Rpta:* $9/2u^2$

4. Encontre a área da região limitada pelas parábolas $y^2 = 16 - 8x$ e $y^2 - 24x = 48$. *Rpta:* $(32/3)\sqrt{6}u^2$